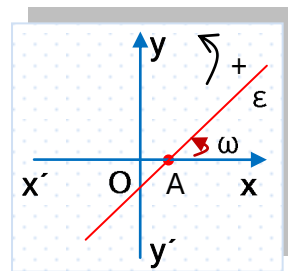


Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

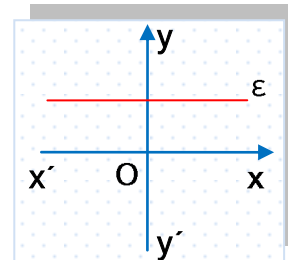
Γωνία ευθείας με τον x'

Εστω ότι μια ευθεία ε τέμνει τον άξονα x' σε σημείο A . Η γωνία ω που διαγράφει η ημιευθεία Ax , αν στραφεί κατά την θετική φορά γύρω από το A , ορίζεται ως η γωνία που σχηματίζει η ευθεία ε με τον άξονα x' . Ισχύει ότι $0^\circ < \omega < 180^\circ$.



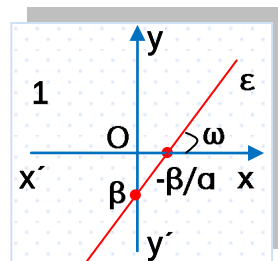
Αν η ευθεία ε είναι παράλληλη στον x' , τότε η γωνία ω που σχηματίζει η ε με τον άξονα x' , είναι ίση με 0° .

Άρα γενικά για την γωνία ω , ισχύει ότι: $0^\circ \leq \omega < 180^\circ$.



Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$

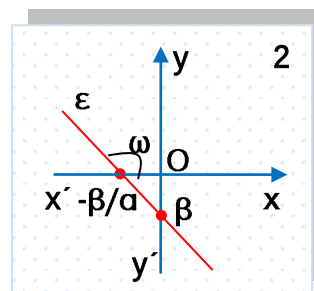
Επειδή το x μπορεί να είναι οποιοσδήποτε αριθμός, η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Η γραφική της παράσταση είναι μια ευθεία που τέμνει τον άξονα x' στο σημείο $\left(-\frac{\beta}{a}, 0\right)$ και τον y' στο σημείο $(0, \beta)$.



Για την γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία με τον x' , ισχύει ότι:

$$\varepsilon\varphi\omega = a$$

Επειδή το $a = \varepsilon\varphi\omega$ καθορίζει πλήρως τη διεύθυνση της ευθείας, ονομάζεται **κλίση** ή **συντελεστής διεύθυνσης** της ευθείας.

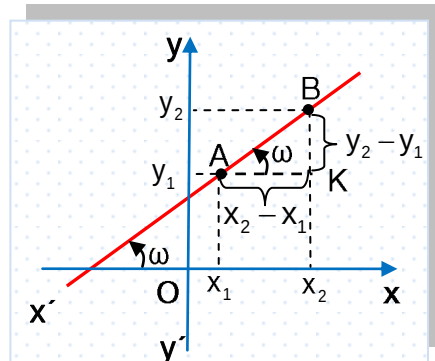


Αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον x' είναι οξεία (σχήμα 1), δηλαδή $0^\circ < \omega < 90^\circ$, τότε $\varepsilon\varphi\omega > 0$, άρα $a > 0$.

Αν η γωνία ω που σχηματίζει με τον x' είναι αμβλεία (σχήμα 2), δηλαδή $90^\circ < \omega < 180^\circ$, τότε $\varepsilon\varphi\omega < 0$, άρα $a < 0$.

Τέλος αν $\omega = 0^\circ$, είναι $a = \varepsilon\varphi 0^\circ = 0$, τότε η συνάρτηση παίρνει τη μορφή $f(x) = \beta$ και λέγεται σταθερή συνάρτηση γιατί για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η τιμή της είναι σταθερή και ίση με β .

Εστω $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία της ευθείας $y = ax + \beta$. Είναι $\angle KAB = \omega$,



$$\text{οπότε } \alpha = \varepsilon\varphi\omega = \frac{(KB)}{(KA)} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

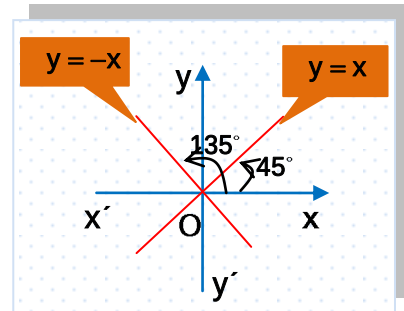
Αν $\beta = 0$, τότε η f παίρνει τη μορφή $f(x) = \alpha x$ και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή O των αξόνων. Ειδικότερα:

Για $\alpha = 1$, είναι η $y = x$. Για τη κλίση της έχουμε:

$\varepsilon\varphi\omega = \alpha = 1$, άρα $\omega = 45^\circ$, οπότε η ευθεία $y = x$ είναι η διχοτόμος της $1^{\text{ης}}$ - $3^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων.

Για $\alpha = -1$, είναι η $y = -x$. Για τη κλίση της έχουμε:

$\varepsilon\varphi\omega = \alpha = -1$, άρα $\omega = 135^\circ$, οπότε η ευθεία $y = -x$ είναι η διχοτόμος της $2^{\text{ης}}$ - $4^{\text{ης}}$ γωνίας των αξόνων.



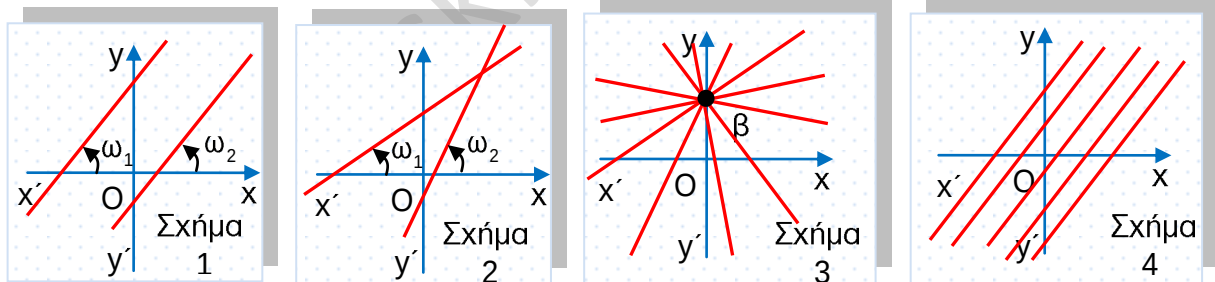
Σχετική θέση δύο ευθειών

Εστω οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$ και $\varepsilon_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$ οι οποίες σχηματίζουν γωνίες ω_1 και ω_2 αντίστοιχα με τον άξονα x' .

→ Αν $\alpha_1 = \alpha_2$ τότε $\varepsilon\varphi\omega_1 = \varepsilon\varphi\omega_2$, δηλαδή $\omega_1 = \omega_2$ και οι ευθείες είναι παράλληλες οι ταυτίζονται.

Αν επιπλέον $\beta_1 \neq \beta_2$, τότε οι ευθείες είναι παράλληλες (Σχήμα 1 και 4), ενώ αν $\beta_1 = \beta_2$ τότε οι ευθείες ταυτίζονται.

→ Αν $\alpha_1 \neq \alpha_2$, τότε $\omega_1 \neq \omega_2$ και οι ευθείες τέμνονται (Σχήμα 2).



→ Οι ευθείες που έχουν το ίδιο β , τέμνουν τον άξονα $y'y$ στο ίδιο σημείο (Σχήμα 3)

Μεθοδολογία ασκήσεων

➤ Χάραξη της ευθείας $y = ax$

Βρίσκουμε ένα τυχαίο σημείο της ευθείας αντικαθιστώντας στο x μια τιμή x_0 . Τότε $y_0 = ax_0$. Στη συνέχεια τοποθετούμε το σημείο (x_0, y_0) σε καρτεσιανό σύστημα και το ενώνουμε ευθύγραμμα με το O .

➤ Χάραξη της ευθείας $y = ax + \beta$.

Βρίσκουμε δύο τυχαία σημεία της ευθείας αντικαθιστώντας στο x δύο τυχαίους αριθμούς. Στη συνέχεια τοποθετούμε τα δύο σημεία στο καρτεσιανό σύστημα και τα ενώνουμε ευθύγραμμα.

➤ Συνάρτηση πολλαπλού τύπου

Κατασκευάζουμε, βάση των προηγούμενων, τη γραφική παράσταση κάθε κλάδου δίνοντας και την ακραία τιμή του x σε κάθε κλάδο για την εύρεση του αντίστοιχου σημείου.

➤ Συνάρτηση με απόλυτα

Κατασκευάζουμε πίνακα προσήμων, βάσει του οποίου βγάζουμε τα απόλυτα, μετατρέποντας την συνάρτηση σε πολλαπλού τύπου.

1. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων: $f(x) = 2x$, $g(x) = 2x - 4$ και $h(x) = 2x + 4$.

Λύση

Οι γραφικές παραστάσεις και των τριών συναρτήσεων είναι ευθείες.

Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, θα βρούμε ένα ακόμη σημείο της. Για $x = 1$, είναι $y = 2 \cdot 1 = 2$, άρα για την f θα ενώσουμε το O με το σημείο $(1, 2)$.

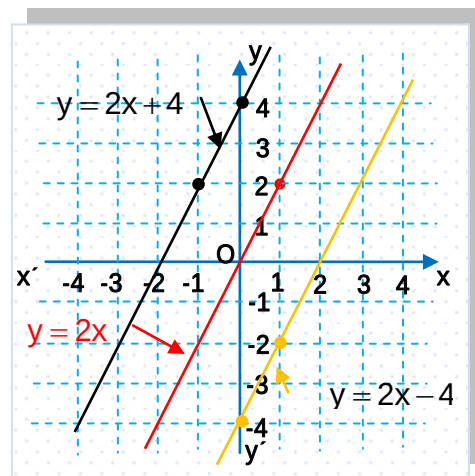
Για την $y = 2x - 4$, έχουμε:

Αν $x = 0$, τότε $y = 2 \cdot 0 - 4 = -4$ και αν $x = 1$, τότε $y = -2$.

Για τη γραφική παράσταση της g θα ενώσουμε τα σημεία $(0, -4)$ και $(1, -2)$.

Για την $y = 2x + 4$, έχουμε:

Αν $x = 0$, τότε $y = 2 \cdot 0 + 4 = 4$ και αν $x = -1$, τότε $y = 2(-1) + 4 = 2$.



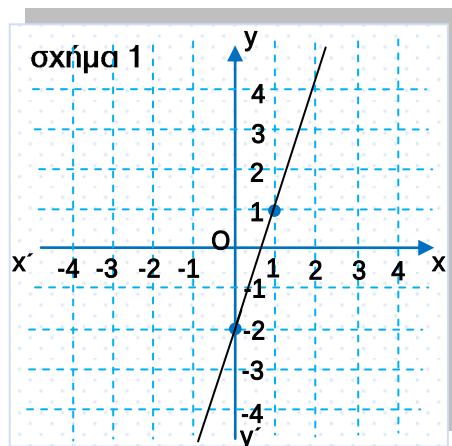
Για τη γραφική παράσταση της f θα ενώσουμε τα σημεία $(0,4)$ και $(-1,2)$.

2. Να κατασκευάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 3x - 2$, για $x \geq 0$.

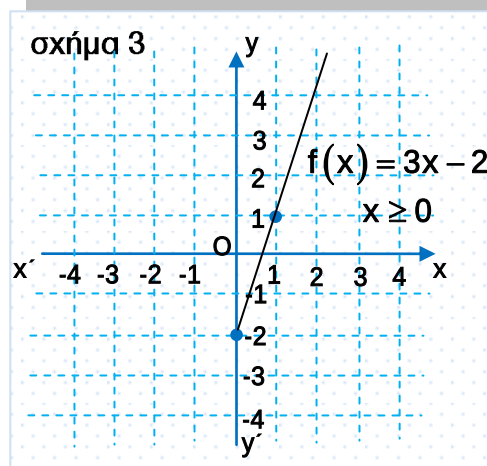
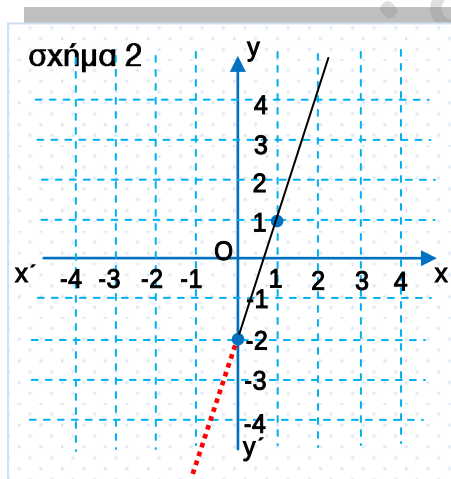
Λύση

Επειδή η γραφική παράσταση της f είναι ευθεία για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι ευθεία, για να την κατασκευάσουμε χρειαζόμαστε δύο σημεία της. Επειδή $x \geq 0$, οι τιμές που θα δώσουμε στη μεταβλητή x θα είναι: αρχικά το άκρο $x = 0$ και μια άλλη τιμή $x > 0$, έστω $x = 1$.

Για $x = 0$ είναι $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$ και για $x = 1$, είναι $y = 3 \cdot 1 - 2 = 1$, άρα τα σημεία που θα ενώσουμε είναι τα $(0, -2)$ και $(1, 1)$.



Όμως τα σημεία της ευθείας που είναι χρωματισμένα με κόκκινο (σχήμα 2), έχουν $x < 0$, οπότε δεν ανήκουν στη γραφική παράσταση της f . Επομένως η γραφική παράσταση της f είναι η ημιευθεία που φαίνεται στο σχήμα



3. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1 \\ -2, & -1 \leq x < 1 \\ 3x-3, & x \geq 1 \end{cases}$.

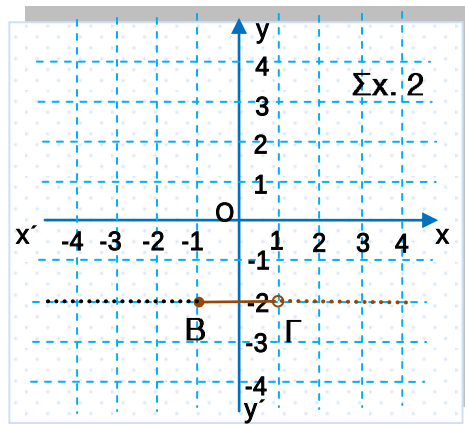
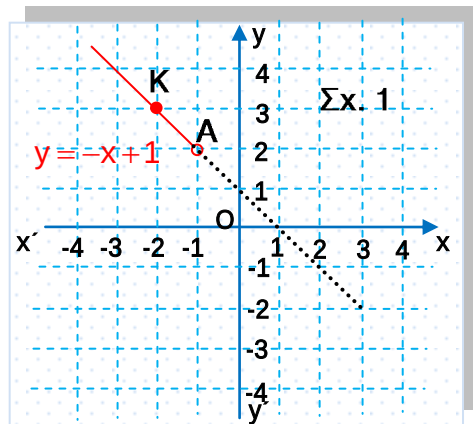
Λύση

Αρχικά θα σχεδιάσουμε την ευθεία $y = -x + 1$ και θα κρατήσουμε το κομμάτι της για το οποίο $x < -1$.

Για $x = -1$, είναι $y = -(-1) + 1 = 2$ και για $x = -2$, είναι $y = -(-2) + 1 = 3$.

Δύο σημεία της είναι τα $A(-1,2)$ και $K(-2,3)$.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = -x+1$, $x < -1$ είναι η ημιευθεία ΑΚ του σχήματος 1.



Η $y = 2$ είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο 2. Άρα η γραφική παράσταση της $f(x) = 2$, $-1 \leq x < 1$ είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ του σχήματος 2.

Για την $y = 3x - 3$, έχουμε:

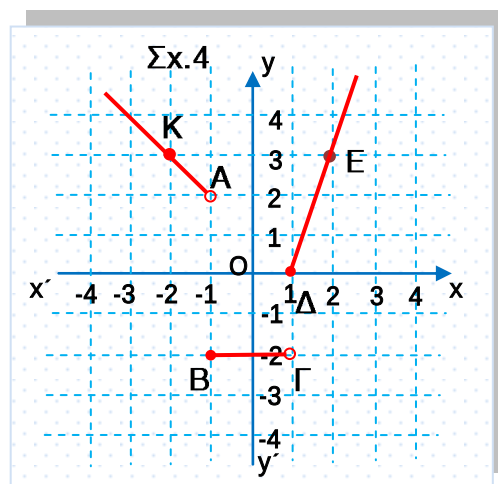
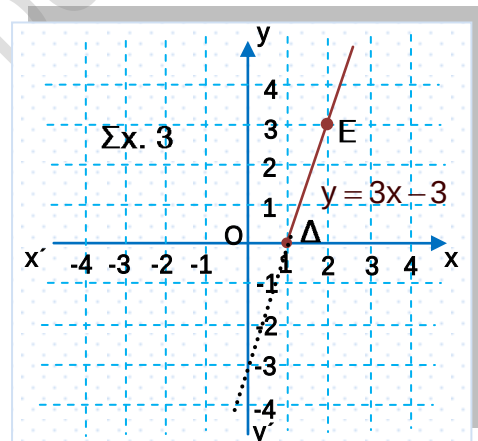
Για $x = 1$, είναι $y = 3 \cdot 1 - 3 = 0$ και για $x = 2$, είναι $y = 3$.

Δύο σημεία της είναι τα $\Delta(1,0)$ και $E(2,3)$.

Η γραφική παράσταση της $f(x) = 3x - 3$, $-1 \leq x < 1$,

είναι η ημιευθεία ΔΕ του σχήματος 3.

Η γραφική παράσταση της f αποτελείται από τις ημιευθείες ΑΚ, ΔΕ και από το τμήμα ΒΓ και φαίνεται στο σχήμα 4.



4. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x) = |x-3| - 2|x+1| + x$.

Λύση

Αρχικά θα βρούμε αφαιρέσουμε από την f τα απόλυτα. Είναι:

$$x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ και}$$

$$x+1=0 \Leftrightarrow x=-1.$$

Αν $x < -1$, τότε

$$f(x) = (-x+3) - 2(-x-1) + x \Leftrightarrow$$

$$f(x) = -x+3+2x+2+x = 2x+5 \Leftrightarrow$$

Αν $-1 \leq x < 3$, τότε

$$f(x) = (-x+3) - 2(x+1) + x = -x+3-2x-2+x = -2x+1.$$

Αν $x \geq 3$, τότε $f(x) = (x-3) - 2(x+1) + x = x-3-2x-2+x = -5$.

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x < -1 \\ -2x+1, & -1 \leq x < 3 \\ -5, & x \geq 3 \end{cases}$$

Για την $f(x) = 2x+5$, $x < -1$, έχουμε:

Αν $x = -1$, τότε $y = 2(-1) + 5 = 3$ και αν $x = -2$

είναι $y = 2(-2) + 5 = 1$. Δύο σημεία της είναι

τα $A(-1,3)$, $B(-2,1)$ και η γραφική της

παράσταση στη περίπτωση αυτή είναι η ημιευθεία AB εκτός του σημείου A .

Για την $f(x) = -2x+1$, $-1 \leq x < 3$, έχουμε:

Αν $x = -1$, τότε $y = -2(-1) + 1 = 3$ και αν

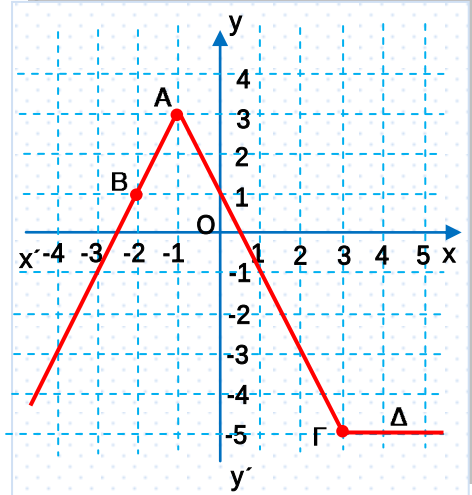
$x = 3$ είναι $y = -2 \cdot 3 + 1 = -5$.

Δύο σημεία της είναι τα $A(-1,3)$, $\Gamma(3,-5)$

και η γραφική της παράσταση στη περίπτωση αυτή είναι το ευθύγραμμο τμήμα $A\Gamma$ εκτός του σημείου Γ .

Τέλος αν $f(x) = -5$, $x \geq 1$, η γραφική παράσταση της f είναι η ημιευθεία $\Gamma\Delta$.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x-3$	-	-	0	+
$ x-3 $	$-x+3$	$-x+3$	0	$x-3$
$x+1$	-	0	+	+
$ x+1 $	$-x-1$	0	$x+1$	$x+1$



Ευθείες παράλληλες

Θα φέρνουμε της εξισώσεις των ευθειών στη μορφή $y = ax + \beta$, και:

$$\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2$$

5. Να εξετάσετε ποιες από τις ευθείες $\varepsilon_1: y = 2x - 1$, $\varepsilon_2: 6x - 3y + 12 = 0$, $\varepsilon_3: y = -2x + 5$ και $\varepsilon_4: 2y - 4x = 10$ είναι παράλληλες.

Λύση

Η ευθεία $\varepsilon_1: y = 2x - 1$, έχει κλίση $\alpha_1 = 2$.

Για την κλίση της ευθείας ε_2 , έχουμε:

$$\varepsilon_2: 6x - 3y + 12 = 0 \Leftrightarrow -3y = -6x - 12 \Leftrightarrow y = 2x + 4, \text{ άρα } \alpha_2 = 2$$

Η ευθεία $\varepsilon_3: y = -2x + 5$, έχει κλίση $\alpha_3 = -2$.

Για την κλίση της ευθείας ε_4 , έχουμε:

$$\varepsilon_4: 2y - 4x = 10 \Leftrightarrow 2y = 4x + 10 \Leftrightarrow y = 2x + 5, \text{ άρα } \alpha_4 = -3.$$

Επειδή $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_4$, είναι: $\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \parallel \varepsilon_4$.

6. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1: y = (\lambda^2 + 3)x + 5\lambda - 1$ και $\varepsilon_2: y = (4\lambda - 1)x - \lambda^2 + |\lambda|$ είναι παράλληλες.

Λύση

Οι ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ έχουν συντελεστές διεύθυνσης $\alpha_1 = \lambda^2 + 3$ και $\alpha_2 = 4\lambda + 1$ αντίστοιχα.

$$\text{Είναι } \varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2 \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3 = 4\lambda - 1 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

Εύρεση ευθείας

- Αν γνωρίζουμε δύο σημεία A και B της ευθείας, τότε:
Αν $x_A = x_B$, τότε η ευθεία AB έχει εξίσωση $x = x_A$.
Αν $x_A \neq x_B$, τότε θα απαιτούμε οι συντεταγμένες των A, B να επαληθεύουν την $y = \alpha x + \beta$. Έτσι θα δημιουργείται σύστημα 2 εξισώσεων με αγνώστους τα α, β , από όπου και θα τους υπολογίζουμε.
- Αν γνωρίζουμε ένα σημείο A και τον συντελεστή διεύθυνσής της, τότε:
Αν η ευθεία είναι παράλληλη ή κάθετη σε δοσμένη ευθεία, θα βρίσκουμε την κλίση της α .
- Αν γνωρίζουμε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x'x$ τότε $\alpha = \tan \varphi$.

$$\text{Θυμίζουμε ότι } \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \tan 45^\circ = 1 \text{ και } \tan 60^\circ = \sqrt{3},$$

$$\tan 120^\circ = -\sqrt{3}, \tan 135^\circ = -1, \tan 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Στη συνέχεια θα απαιτούμε οι συντεταγμένες του σημείου A να επαληθεύουν την $y = \alpha x + \beta$ και έτσι θα βρίσκουμε και το β .

7. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ του διπλανού σχήματος.

Λύση

Η ευθεία ϵ έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$.

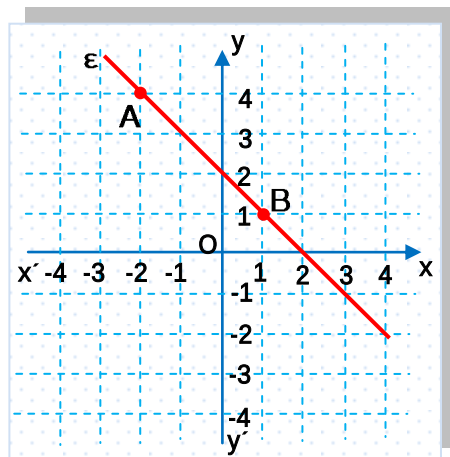
Παρατηρώντας την γραφική της παράσταση, βλέπουμε ότι διέρχεται από τα σημεία

$A(-2,4)$ και $B(1,1)$, οπότε οι συντεταγμένες των σημείων αυτών επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας, δηλαδή:

$$\begin{cases} 4 = a(-2) + \beta \\ 1 = a \cdot 1 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + \beta = 4 \\ \beta = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -2a + 1 - a = 4 \\ \beta = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a = 3 \\ \beta = 1 - a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{-3} = -1 \\ \beta = 1 - a = 1 - (-1) = 2 \end{cases}$$

Άρα η ευθεία ϵ έχει εξίσωση $y = -x + 2$.



8. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ϵ του διπλανού σχήματος.

Λύση

Η ευθεία ϵ έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$.

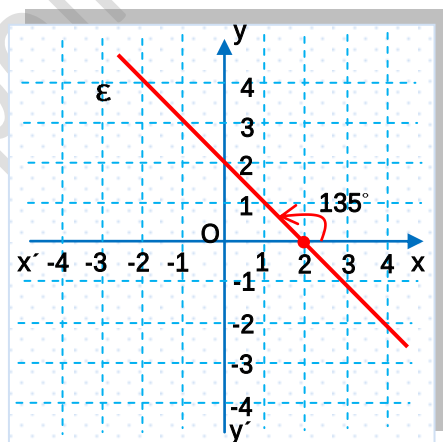
Επειδή η ευθεία σχηματίζει γωνία $\omega = 135^\circ$ με τον άξονα x' , ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι: $a = \tan 135^\circ = -1$.

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $y = -x + \beta$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο $(2,0)$, ισχύει

$$\text{ότι: } 0 = -2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 2.$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση $y = -x + 2$.



9. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας η οποία:

- έχει κλίση 3 και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,-5)$.
- σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0,4)$.
- διέρχεται από τα σημεία $A(1,4)$ και $B(0,2)$.
- είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -2x + 7$ και διέρχεται από το σημείο $K(2,6)$.

Λύση

- Η ευθεία ϵ έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$.

Επειδή έχει κλίση 3, είναι $a = 3$ και επειδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, -5)$, είναι $\beta = -5$, οπότε η ευθεία είναι $y = 3x - 5$.

- ii. Η ευθεία ε έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$. Επειδή η ευθεία σχηματίζει γωνία $\omega = 45^\circ$ με τον άξονα $x'x$, ο συντελεστής διεύθυνσης της είναι:
 $a = \tan 45^\circ = 1$.

Επειδή τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, 4)$ είναι $\beta = 4$, οπότε η ευθεία είναι η $y = x + 4$.

- iii. Η ευθεία έχει κλίση $a = \frac{2-4}{0-1} = 2$ και τέμνει τον $y'y$ στο $B(0, 2)$, άρα έχει $\beta = 2$ και η εξίσωση της είναι η $y = 2x + 2$.

- iv. Επειδή η ζητούμενη ευθεία είναι παράλληλη στην $y = -2x + 7$, έχει κλίση $a = -2$. Η ευθεία έχει εξίσωση της μορφής $y = -2x + \beta$.

Επειδή διέρχεται από το σημείο $K(2, 6)$, είναι $6 = -2 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 10$, άρα η ευθεία είναι η $y = -2x + 10$.

10. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ του διπλανού σχήματος
 Λύση

Η ευθεία ε_1 έχει εξίσωση της μορφής $y = ax + \beta$.

Επειδή διέρχεται από τα σημεία $(-4, 0)$ και $(0, 4)$,

ισχύει:

$$\begin{cases} 0 = a(-4) + \beta \\ 4 = a \cdot 0 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -4a + \beta \\ 4 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 4 = 0 \\ \beta = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

Άρα $\varepsilon_1: y = x + 4$.

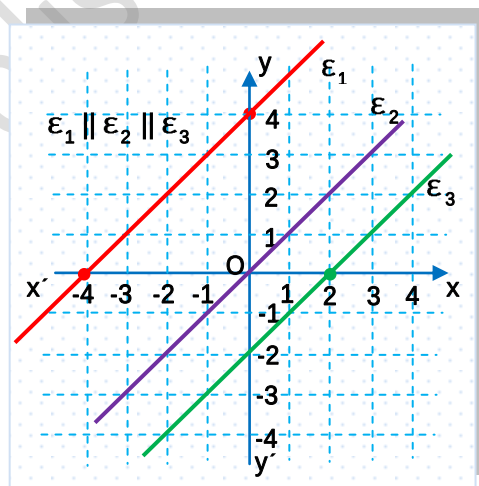
Επειδή οι ευθείες ε_2 και ε_3 είναι παράλληλες της ε_1 , θα έχουν κλίση $a = 1$.

Επειδή η ε_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων έχει εξίσωση της μορφής $y = ax$, άρα είναι η $y = x$.

Η ε_3 έχει εξίσωση της μορφής $y = x + \beta$. Επειδή διέρχεται από το σημείο $(2, 0)$,

ισχύει ότι:

$$0 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2, \text{ οπότε η } \varepsilon_3 \text{ έχει εξίσωση } y = x - 2.$$



11. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών ϵ_1, ϵ_2 του διπλανού σχήματος.

Λύση

Η ευθεία ϵ_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων
οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = ax$.

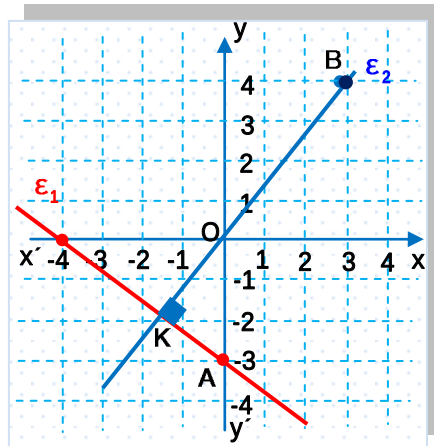
Επειδή διέρχεται από το σημείο $(3, 4)$, ισχύει ότι:

$$4 = a \cdot 3 \Leftrightarrow a = \frac{4}{3}, \text{ άρα } \epsilon_2 : y = \frac{4}{3}x.$$

Η ϵ_1 διέρχεται από τα σημεία $(-4, 0)$ και $(0, -3)$,

$$\text{οπότε η κλίση της είναι } a_1 = \frac{-3 - 0}{0 - (-4)} = -\frac{3}{4}.$$

Επειδή η ϵ_1 τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, -3)$, έχει εξίσωση $y = -\frac{3}{4}x - 4$.



12. Να βρείτε τη συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Λύση

Η γραφική παράσταση της f χωρίζεται σε τρία τμήματα.

Το πρώτο είναι ευθεία της μορφής $y = ax + \beta$ για $x < 2$, το δεύτερο είναι ευθύγραμμο τμήμα της ευθείας με εξίσωση της μορφής $y = ax$ και το τρίτο είναι η ευθεία $y = -2$ για $x > 2$.

Από το σχήμα προκύπτει ότι η ευθεία $y = ax + \beta$

διέρχεται από τα σημεία $(-4, -2)$ και $(-3, 0)$, άρα:

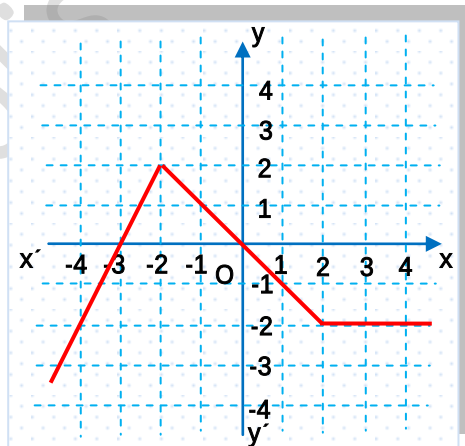
$$\begin{cases} -2 = a(-4) + \beta \\ 0 = a(-3) + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + \beta = -2 \\ -3a + \beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a + 3a = -2 \\ \beta = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = -2 \\ \beta = 3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ \beta = 3 \cdot 2 = 6 \end{cases}$$

Άρα $f(x) = 2x + 6, x < 2$.

Το τμήμα $y = ax$ παρατηρούμε ότι διέρχεται από το σημείο $(2, -2)$, άρα

$$-2 = a \cdot 2 \Leftrightarrow a = -1.$$

$$\text{Οπότε } f(x) = -x, -2 \leq x \leq 2. \text{ Άρα } f(x) = \begin{cases} 2x + 6, & x < 2 \\ -x, & -2 \leq x \leq 2 \\ -2, & x > 2 \end{cases}$$



13. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(1, -1)$ και $B(3, 5)$.

Λύση

Επειδή $x_A \neq x_B$, η ευθεία δεν είναι κάθετη στον $x'x$, οπότε η εξίσωση της είναι της μορφής

$y = ax + \beta$. Επειδή διέρχεται από τα σημεία Α και Β, ισχύει:

$$\begin{cases} -1 = a \cdot 1 + \beta \\ 5 = a \cdot 3 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + \beta = -1 \\ 3a + \beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - a \\ 3a - 1 - a = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - a \\ 2a = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 - 3 = -4 \\ a = 3 \end{cases}$$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση: $y = 3x - 4$.

14. Μια φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = -x + 2$ και ανακλάται στον άξονα $x'x$. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας κατά μήκος της οποίας κινείται η ανακλώμενη ακτίνα.

Λύση

Αν $x = 0$, τότε $y = 2$ και αν $y = 0$, τότε $x = 2$.

Η φωτεινή ακτίνα κινείται κατά μήκος της ημιευθείας ΑΚ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα, όπου $A(2,0)$ και $K(0,2)$.

Η ανάκλαση γίνεται στο σημείο Α και η φωτεινή ακτίνα ανακλάται υπό ίση γωνία σε σχέση με την κάθετη στο $x = 2$. Επειδή η ΑΚ έχει συντελεστή διεύθυνσης $a_1 = -1$, είναι

$\epsilon_{\phi\chi AK} = -1$, άρα $\chi_{AK} = 135^\circ$. Τότε

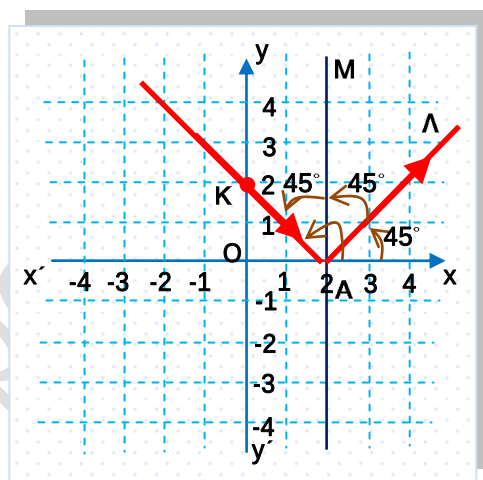
$KAM = MA\Lambda = \Lambda Ax = 45^\circ$.

Η ευθεία ΑΛ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$a = \epsilon_{\phi 45^\circ} = 1$, οπότε η εξίσωσή της είναι της μορφής $y = x + \beta$.

Επειδή το σημείο $A(2,0)$ ανήκει στην ΑΛ, ισχύει ότι:

$0 = 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = -2$, άρα $A\Lambda : y = x - 2$.



Προβλήματα που εκφράζονται από την συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$.

Τα προβλήματα που εκφράζονται μέσω της συνάρτησης f είναι τα προβλήματα των αναλόγων ποσών.

Τις μεταβλητές του προβλήματος θα τις θέτουμε x και y (x την ανεξάρτητη μεταβλητή) και από την εκφώνηση θα προσπαθούμε να δημιουργούμε εξισώσεις για τα a, β .

15. Σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών με 18 ερωτήσεις του τύπου Σωστό-Λάθος, για να αποτρέψει ο καθηγητής τους μαθητές να απαντήσουν στη τύχη αποφάσισε να τους βαθμολογήσει με τον εξής τρόπο: όλοι παίρνουν 2 βαθμούς και στη συνέχεια για κάθε σωστή απάντηση θα παίρνουν 1 βαθμό, ενώ για κάθε 4 λάθος απαντήσεις θα αφαιρείται 1 βαθμός. Αν οι μαθητές πρέπει να απαντήσουν σε όλες τις ερωτήσεις, τότε:

- i. Να εκφράσετε τον τελικό βαθμό y ενός μαθητή ως συνάρτηση των σωστών του απαντήσεων.
- ii. Να βρείτε πόσες σωστές απαντήσεις πρέπει να δώσει ένας μαθητής για να πιάσει τη βάση.
- iii. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Λύση

- i. Εστω ότι ο μαθητής απάντησε σωστά σε x ερωτήσεις, τότε στις υπόλοιπες $18 - x$ έχει απαντήσει λάθος.

Επειδή για κάθε σωστή απάντηση παίρνει 1 βαθμό, για τις x σωστές απαντήσεις θα πάρει x βαθμούς.

Επειδή για κάθε 4 λάθος απαντήσεις του αφαιρείται 1 βαθμός, για τη 1 λάθος απάντηση θα του αφαιρείται 0,25 βαθμοί, άρα για τις $18 - x$ λάθος απαντήσεις θα του αφαιρεθούν $0,25(18 - x)$ βαθμοί.

Άρα κάθε μαθητής θα πάρει 2 βαθμούς και x βαθμούς και θα του αφαιρεθούν $0,25(18 - x)$ βαθμοί.

Αν y είναι η τελική βαθμολογία του κάθε μαθητή τότε:

$$y = 2 + x - 0,25(18 - x) \Leftrightarrow$$

$$y = 2 + x - 4,5 + 0,25x \Leftrightarrow$$

$$y = 1,25x - 2,5 \text{ με } 0 \leq x \leq 18.$$

- ii. Για να πιάσει ένας μαθητής τη βάση πρέπει:

$$y = 10 \Leftrightarrow 1,25x - 2,5 = 10 \Leftrightarrow 1,25x = 10 + 2,5 \Leftrightarrow 1,25x = 12,5 \Leftrightarrow$$

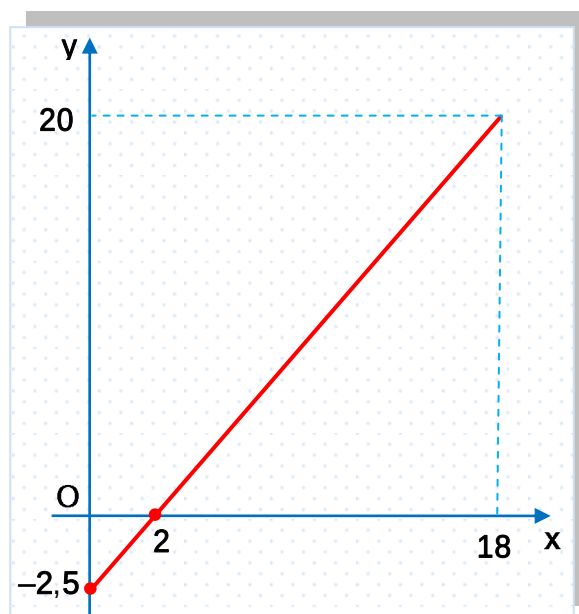
$$x = \frac{12,5}{1,25} = 10$$

Πρέπει να απαντήσει σωστά σε 10 ερωτήσεις.

- iii. Αν $x = 0$, τότε $y = 1,25 \cdot 0 - 2,5 = -2,5$ και

αν $x = 2$, τότε $y = 1,25 \cdot 2 - 2,5 = 0$.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = 1,25x - 2,5$, $0 \leq x \leq 18$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



16. Σε μια δεξαμενή υπάρχουν 600 lt βενζίνης. Βυτιοφόρο, που περιέχει 2000 lt, αρχίζει να τη γεμίζει. Αν η παροχή του βυτιοφόρου είναι 100 λίτρα ανά λεπτό, να βρείτε:
- Τη ποσότητα της βενζίνης στο βυτιοφόρο συναρτήσει του χρόνου t .
 - Τη ποσότητα της βενζίνης στη δεξαμενή συναρτήσει του χρόνου t .
 - Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων αυτών και να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία το βυτιοφόρο και η δεξαμενή έχουν ίσες ποσότητες βενζίνης.

Λύση

- Κάθε λεπτό φεύγουν από το βυτιοφόρο 100 λίτρα βενζίνης, άρα σε t λεπτά θα έχουν φύγει $100t$ λίτρα βενζίνης. Οπότε η ποσότητα της βενζίνης που βρίσκεται στο βυτιοφόρο σε t λεπτά, είναι: $B(t) = 2000 - 100t$ λίτρα βενζίνης.
- Στη δεξαμενή κάθε λεπτό προστίθενται 100 λίτρα βενζίνης, άρα μετά από t λεπτά η δεξαμενή περιέχει $\Delta(t) = 600 + 100t$ λίτρα βενζίνης.
- Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $B(t), \Delta(t)$ είναι ευθείες.

Αν $t = 0$, τότε $B(0) = 2000$ και $\Delta(0) = 600$, ενώ αν $t = 1$, τότε $B(1) = 1900$

και

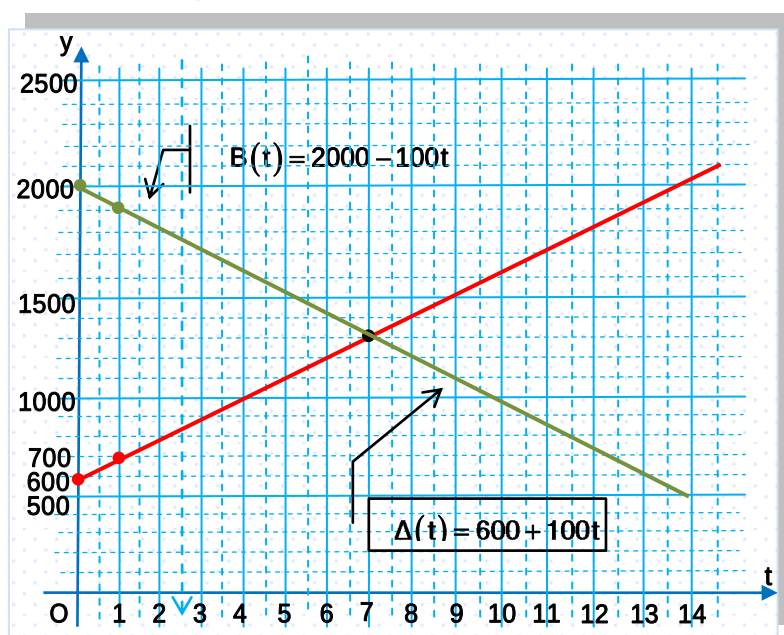
$$\Delta(1) = 700.$$

Ενώνοντας τα σημεία $(0, 2000)$ και $(1, 1900)$ κατασκευάζετε η $B(t)$, ενώ

ενώνοντας τα σημεία $(0, 600)$ και $(1, 700)$ κατασκευάζετε η $\Delta(t)$.

Για να έχουν ίσες ποσότητες βενζίνης η δεξαμενή και το βυτιοφόρο, πρέπει:

$$\Delta(t) = B(t) \Leftrightarrow 600 + 100t = 2000 - 100t \Leftrightarrow 200t = 1400 \Leftrightarrow t = 7 \text{ λεπτά.}$$



ΕΞΑΣΚΗΣΗ

Ερωτήσεις κατανόησης

17. Να τοποθετήσετε μέσα σε κάθε ορθογώνιο το γράμμα Σ αν κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις τις θεωρείτε σωστές ή το Λ αν τις θεωρείτε λανθασμένες.

- i. Η ευθεία $x = 2$ είναι συνάρτηση. ☐
- ii. Η εξίσωση $2x + 3y^2 = 4$ παριστάνει ευθεία. ☐
- iii. Οι ευθείες $x = 2$ και $y = 3$ είναι κάθετες. ☐
- iv. Οι ευθείες $y = 2x + 1$ και $y = 2x - 5$ είναι παράλληλες. ☐
- v. Οι ευθείες $y = 3x$ και $y = 3x + 5$ τέμνονται. ☐
- vi. Η ευθεία $y = 30x + 60$ σχηματίζει γωνία 30° με τον $x'x$. ☐
- vii. Η ευθεία $y = x$ σχηματίζει γωνία 45° με τον $x'x$. ☐
- viii. Η ευθεία $y = ax + 4$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0,4)$. ☐
- ix. Η ευθεία $y = ax + \beta$ είναι παράλληλη στον $y'y$, όταν $a = 0$. ☐
- x. Η συνάρτηση $f(x) = 5$ έχει γραφική παράσταση ευθεία παράλληλη στον $x'x$. ☐
- xi. Η εξίσωση $y^2 - x^2 = 0$ εκφράζει δύο ευθείες κάθετες. ☐
- xii. Το σημείο τομής των ευθειών $x = 3$ και $y = 1$ έχει συντεταγμένες $(3,1)$. ☐

18. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας $x = 3$ είναι:

A. 1 B. $\sqrt{3}$ Γ. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ Δ. 3 Ε. δεν ορίζεται

19. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = a_1x + \beta_1$ και $\varepsilon_2 : y = a_2x + \beta_2$ είναι παράλληλες, όταν:

A. $a_1 = a_2$ B. $a_1 + a_2 = -1$ Γ. $a_1 = \frac{-1}{a_2}$
Δ. $a_1 + a_2 = 0$ Ε. $a_1 + a_2 = -1$

20. Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(3,1)$ και $(-2,-1)$, είναι:

A. $2x + y = 7$ B. $4x - 5y = 7$ Γ. $x - 2y = 0$
Δ. $2x - 5y = 1$ Ε. $y = 5x$

21. Ποιά ευθεία από τις παρακάτω είναι παράλληλη στην $\varepsilon : y = -2x + 1$;

A. $y = 2x + 5$ B. $y = -\frac{1}{2}x + 1$ Γ. $y = -2x + 4$
Δ. $y = \frac{1}{2}x + 1$ Ε. $y = \frac{5}{2}x$

22. Αν το σημείο $(k, 3k)$ ανήκει σε ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε αυτή έχει εξίσωση:

A. $3y = x$ B. $y = 3x$ Γ. $y = -\frac{1}{3}x$ Δ. $y = -3x$ Ε. $x = -3y$

Α΄ ΟΜΑΔΑ

23. Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ η ευθεία:

i. $y = x + 1821$ ii. $y = -x + 2$ iii. $y = \sqrt{3}x + 1$
iv. $y = -\sqrt{3}x + 4$ v. $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 5$ vi. $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 3$

24. Να βρείτε την κλίση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i. $A(-1, 3)$ και $B(5, 1)$ ii. $A(4, -2)$ και $B(3, -1)$
iii. $A(3, 2)$ και $B(-5, 2)$ iv. $A(-2, 5)$ και $B(0, 1)$

25. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας, η οποία:

i. έχει κλίση 2 και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, 4)$.
ii. σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, -3)$.
iii. είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 2012$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, 2)$.
iv. είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 5$ και διέρχεται από το σημείο $A(2, 2)$.

26. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία:

i. $A(-2, 3)$ και $B(-1, 1)$ ii. $\Gamma(2, 2)$ και $\Delta(4, 1)$
iii. $E(3, 5)$ και $Z(2, 5)$ iv. $H(3\sqrt{2}, -2)$ και $\Theta(2\sqrt{2}, -1)$

27. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 3x - 2$, $g(x) = 3x$ και $h(x) = 3x + 2$.

28. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = -2x + 3$ και $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$. Τι παρατηρείτε;

29. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

i. $f(x) = 2x + 2$, $x \geq -1$ ii. $f(x) = 3x - 1$, $x < 2$ iii. $f(x) = \frac{1}{4}x$, $x > 0$

30. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης:

i. $f(x) = 3x - 4$, $1 \leq x \leq 3$ ii. $f(x) = x + 3$, $-2 < x \leq 2$

27. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} -2x+4, & x < 0 \\ 4, & 0 \leq x < 3 \\ 3x-2, & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} 3, & x < -2 \\ 3x+4, & -2 \leq x \leq 1 \\ -3x+10, & x \geq 1 \end{cases}$$

28. Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των παρακάτω συναρτήσεων:

$$\text{ii. } f(x) = \begin{cases} 2x+5, & x < -2 \\ 7x+15, & x \geq -2 \end{cases}$$

$$\text{ii. } g(x) = \begin{cases} -4x+1, & x < 1 \\ 3x-1, & x \geq 2 \end{cases}$$

29. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες οι ευθείες που δίνονται κάθε φορά να είναι παράλληλες.

$$\text{i. } y = \lambda x + 3 \text{ και } y = 2x + 4$$

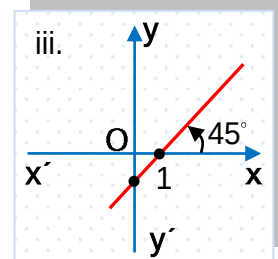
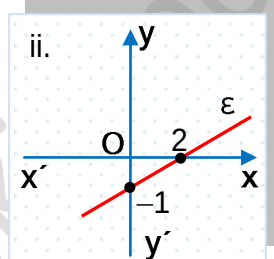
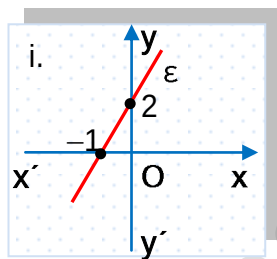
$$\text{ii. } y = (3\lambda - 1)x + \lambda \text{ και } y = (\lambda + 5)x - 7$$

$$\text{iii. } y = \frac{\lambda - 1}{3}x + \lambda^2 - 4 \text{ και } y = \frac{\lambda + 2}{4}x - 7$$

$$\text{iv. } y = \lambda^2 x - 4 \text{ και } y = 4x - \lambda$$

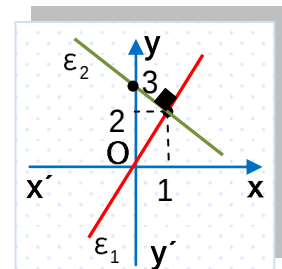
30. Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ , για τις οποίες οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = |3\lambda - 2|x + \lambda^4$ και $\varepsilon_2 : y = |\lambda - 4|x + 3 - \lambda$, είναι παράλληλες.

31. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ε στα παρακάτω σχήματα.

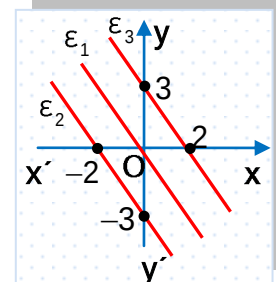


Β΄ ΟΜΑΔΑ

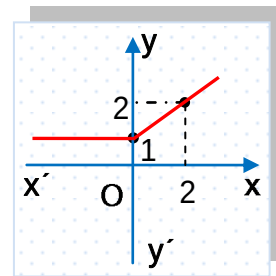
32. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ του διπλανού σχήματος.



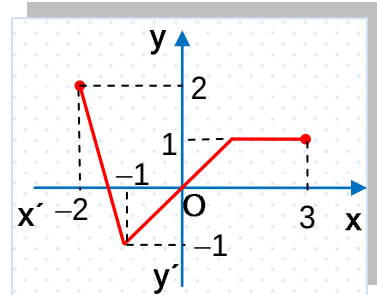
33. Να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ του διπλανού σχήματος.



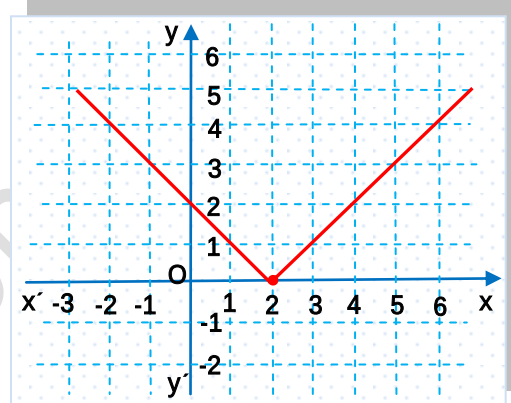
34. Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



35. Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.



36. Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση δίνεται στο διπλανό σχήμα.

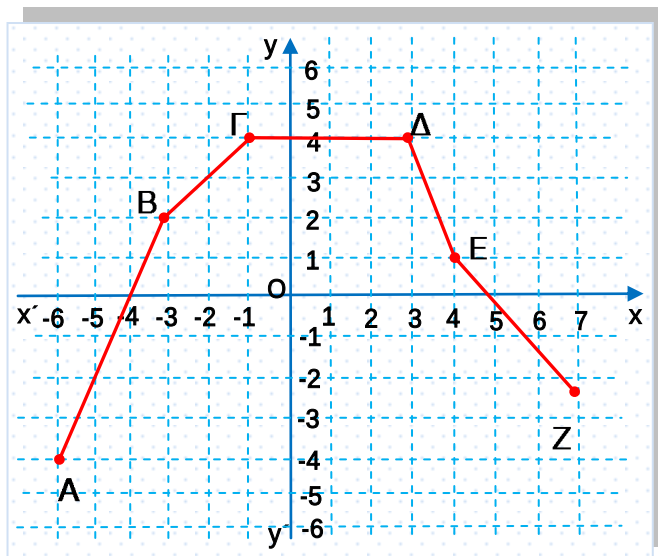


37. Να βρείτε συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔ, όπου $A(-4,2)$, $B(-2,2)$, $\Gamma(2,4)$ και $\Delta(4,-2)$.

38. i. Στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων να χαράξετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = |x-1|$ και $g(x) = 1$ και με τη βοήθεια αυτών να λύσετε τις ανισώσεις: $|x-1| < 1$ και $|x-1| \geq 1$
- ii. Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά τις απαντήσεις σας στο προηγούμενο ερώτημα.

39. Ένας πωλητής έχει μηνιαίο μισθό 500€ και επιπλέον παίρνει το 2% των πωλήσεων που πραγματοποιεί.
- Να εκφράσετε τις αποδοχές y του πωλητή ως συνάρτηση των πωλήσεων x που κάνει κάθε μήνα.
 - Να υπολογίσετε τις αποδοχές του πωλητή για μηνιαίες πωλήσεις 20.000€.
 - Για να έχει ο πωλητής μηνιαίες αποδοχές 1.500€ πόσες πωλήσεις πρέπει να πραγματοποιήσει;
 - Να παραστήσετε γραφικά, σε κατάλληλο σύστημα αξόνων, την προηγούμενη συνάρτηση.

40. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f είναι η πολυγωνική γραμμή ΑΒΓΔΕΖ του παρακάτω σχήματος.



- i. Να βρείτε τις τιμές $f(-3), f(-1), f(0), f(1), f(4)$.
 - ii. Να λύσετε τις εξισώσεις: $f(x) = 0$, $f(x) = 4$ και $f(x) = -4$.
 - iii. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας ΒΔ και να λύσετε την ανίσωση $f(x) \geq \frac{1}{3}x + 3$.
41. Ο κύριος Παναγιώτης διαθέτει 20€ και θέλει να αγοράσει κρέας που κοστίζει 8€ το κιλό και πατάτες που κοστίζουν 0,80€ το κιλό.
- i. Αν αγοράσει 1,5 κιλά κρέας, τότε πόσα κιλά πατάτες μπορεί να αγοράσει με τα υπόλοιπα χτήματα;
 - ii. Αν αγοράσει 5 κιλά πατάτες τότε πόσα κιλά κρέας μπορεί να αγοράσει;
 - iii. Ποια σχέση συνδέει τα κιλά κρέας και τα κιλά πατάτες που θα αγοράσει;
 - iv. Να γίνει η γραφική παράσταση της συνάρτησης που εκφράζει τα κιλά πατάτες που θα αγοράσει ο κύριος Παναγιώτης, σε σχέση με τα κιλά κρέας που θα αγοράσει.
42. Όταν χρησιμοποιούμε ταξί, πληρώνουμε 2€ για την σημαία και 1,2€ για κάθε χιλιόμετρο διαδρομής.
- i. Να βρείτε τη συνάρτηση που εκφράζει το ποσό y που θα πληρώσουμε για μια διαδρομή x χιλιομέτρων.
 - ii. Να γίνει η γραφική παράσταση της προηγούμενης συνάρτησης.
43. Μια φωτεινή ακτίνα ξεκινά από το σημείο $A(a, 10)$ και κινείται κατά μήκος της ευθείας $y = -2x + 4$ έως ότου ανακλαθεί πάνω στον άξονα $x'x$ (η γωνία που σχηματίζει η φωτεινή ακτίνα με την κάθετη (κ) στον άξονα $x'x$ στο σημείο ανάκλασης, είναι ίση με τη γωνία που σχηματίζει η ανακλώμενη με την κάθετη (κ))

- i. Βρείτε το σημείο A.
- ii. Βρείτε το σημείο ανάκλασης.
- iii. Βρείτε την εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας.
- iv. Αν το μήκος της ανακλώμενης ακτίνας είναι $4\sqrt{5}$ μονάδες και μετά σταματά σε σημείο B, να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου αυτού.

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

17. i. Λ ii. Λ iii. Σ iv. Σ v. Λ vi. Λ vii. Σ viii. Σ ix. Λ x. Σ xi. Σ xii. Σ 18. Ε 19. Α 20. Δ 21. Γ 22. Β 23. i. 45° ii. 135° iii. 60° iv. 120° v. 30° vi. 150° 24. i. $-1/3$ ii. -1 iii. 0 iv. -2 25. i. $y=2x+4$ ii. $y=x-3$ iii. $y=3x+2$ iv. $y=2x-2$ 26. i. $y=-2x-1$ ii. $y=-\frac{1}{2}x+3$ iii. $y=5$ iv. $y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$ 29. i. 2, ii. 3, iii. 10, iv. 2,-2 30. $-1\frac{3}{2}$ 31. i. $y=2x+2$, ii. $y=\frac{1}{2}x-1$, iii. $y=x-1$ 32. $\epsilon_1: y=2x$, $\epsilon_2: y=-x+3$ 33. $\epsilon_1: y=-\frac{3}{2}x$, $\epsilon_2: y=-\frac{3}{2}x-3$, $\epsilon_3: y=-\frac{3}{2}x+3$	34. $f(x)=\begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \frac{1}{2}x+1 & x > 0 \end{cases}$ 35. $f(x)=\begin{cases} -3x-4, & x < -1 \\ x, & -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \leq 3 \end{cases}$ 36. $f(x)= x-2$ 37. $f(x)=\begin{cases} 2, & -4 \leq x \leq -2 \\ \frac{1}{2}x+3, & -2 < x \leq 2 \\ -3x+10, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$ 39. i. $y=0,02x+500$ ii. 900€ iii. 50.000€ 40. i. $f(-3)=2$, $f(-1)=f(0)=f(1)=4$, $f(4)=1$ ii. $f(x)=0 \Leftrightarrow x=-4$ ή 5, $f(x)=4 \Leftrightarrow x \in [-1,3]$ $f(x)=-4 \Leftrightarrow x=-6$ iii. $y=\frac{1}{3}x+3$, $[-3,3]$ 41. i. 10 κιλά ii. 2 κιλά iii. $8x+0,8y=20$ 42. i. $y=1,2x+2$ 43. i. A(-3,4) ii. (2,0) iii. $y=2x-4$ iv. B(6,8)
--	---

Σ.Μιχαήλογλου-Ε.Τόλης